Konvergenz in der sechsten Klasse

Rudolf Taschner, Wien

Das Thema konvergenter Folgen ist jenes, welches in der Schule am nächsten an die „reine" Mathematik heranführt — dementsprechend anspruchsvoll und anwendungsfremd wird es empfunden.

Die hier präsentierte Behandlung dieses Themas ist ein Auszug (ohne die eigentlich das Karnstück bildenden Übungsbeispiele) eines Kapitels eines in Kürze erscheinenden „Übungs- und Lehrbuches" für die Mathematik an Oberstufen von AHS. Es wird wesentlich darauf Wert gelegt, dass der *Kern* des zu behandelnden Stoffes *möglichst früh* herausgeschält wird, sodass man im Unterricht fast an jeder Stelle abbrechen kann, ohne sich dem Vorwurf aussetzen zu müssen, Wesentliches nicht erwähnt zu haben. Statt Folgen und Grenzwerten steht die *geometrische Reihe* als das *Paradebeispiel* aller Konvergenzuntersuchungen am Beginn; aus ihr werden alle weiteren Begriffe entwickelt.

Motivation: Das Paradoxon des Zenon

Zenon von Elea (geb. um −495, gest. um −430) war ein begeisterter Anhänger und Gefolgsmann des Parmenides (geb. um −520, gest. um −450), welcher lehrte, dass uns unsere Sinne *betrügen*, wenn sie uns vorgaukeln, es gäbe in der Welt irgendwelchen Wandel. In Wahrheit — so meinte Parmenides — ist der Kosmos unveränderbar *starr*. Jede Bewegung, die wir wahrnehmen, wäre bloß *Sinnestäuschung*.

Diese wahrhaft sonderbare Ansicht seines Lehrers meinte Zenon *logisch begründen* zu können. Er verwob seine Beweisführung in eine Geschichte, in der *Achill*, der sagenhafte Held und schnellste Läufer der Antike, eine *Schildkröte*, das langsamste Tier, das man damals kannte, einzuholen versucht:

Um sich eine bildhafte Vorstellung machen zu können, nehmen wir an, Achill laufe zehnmal so schnell wie die Schildkröte, und zu Beginn habe die Schildkröte einen Vorsprung von 900 Meter. Dann ist zu dem Zeitpunkt, an dem Achill die 900 Meter zurückgelegt hat, die Schildkröte immer noch 90 Meter voraus. Wenn Achill diese 90 Meter bewältigt hat, bleibt der Schildkröte immer noch ein Vorsprung von 9 Meter. Und selbst wenn Achill diese 9 Meter in Windeseile durchlaufen hat, die Schildkröte kriecht immer noch mit einem Vorsprung von 90 Zentimeter vor ihm.

Zenon teilt diesen unbestreitbaren Sachverhalt seinen verblüfften Zuhörern mit folgenden Worten mit: „*Immer*, wenn Achill den ursprünglichen Ort der Schildkröte erreicht, ist sie ihm ein Stück Weges voraus. Wenn dies tatsächlich *immer* der Fall ist, wie gibt es dann *je* die Möglichkeit, dass Achill die Schildkröte einholt?"

Und auf den arglosen Einwurf seines Publikums, man *sehe* doch, dass Achill die Schildkröte erreicht, entgegnet Zenon, ganz Schüler des Parmenides: „Seht ihr, so betrügen euch die Sinne!"

Die Summenformel der geometrischen Reihe

Einen ersten Einblick in das Geheimnis der Geschichte des Zenon gewinnt man, wenn man die einzelnen Strecken, die Achill zurücklegt, zu addieren versucht: Nehmen wir einen Kilometer als Einheit an, dann lauten die von Zenon genannten Strecken addiert:

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \ldots .$$

Führt man ganz naiv diese Addition durch, bemerkt man, dass jeder Summand die vorhergehende Summe nur dadurch ändert, dass er sie um eine weitere Ziffer 9 in der folgenden Nachkommastelle bereichert:

$$0{,}9 + 0{,}009 = 0{,}99\,,$$
$$0{,}99 + 0{,}009 = 0{,}999\,,$$
$$0{,}999 + 0{,}0009 = 0{,}9999\,,$$

und so weiter.

Die gesamte Überholstrecke wäre somit die „unendliche Dezimalzahl"

0,999...99...

mit „unendlich vielen Neunern nach dem Komma" — doch worum handelt es sich dabei eigentlich?

Geschickter ist es, so zu argumentieren: Wenn Achill zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte und dabei die Strecke der Länge s zurücklegt, hat die Schildkröte nur eine Strecke der Länge $s/10$ durchlaufen. Wenn im Speziellen s die gesuchte Überholstrecke darstellt, muss für sie die Gleichung

$$s = 0{,}9 + \frac{s}{10}$$

gelten. Ihre Lösung führt nach Multiplikation beider Seiten mit 10 auf

$$10s = 9 + s \quad | -s$$
$$9s = 9 \quad | :9$$
$$s = 1\,.$$

Wir sehen, dass Achill die Schildkröte nach genau einem Kilometer überholt hat. Überdies erkennen wir, dass die oben angeschriebene „unendliche Dezimalzahl" mit 1 übereinstimmt:

0,999...99... = 1 .

Das eben gebrachte Argument hängt keineswegs davon ab, dass wir der Schildkröte gerade einen Vorsprung von 900 Meter gewährten und Achill genau zehnmal so schnell laufen ließen: Wenn die Schildkröte einen Vorsprung der Länge a besitzt und ihre Laufgeschwindigkeit sich von der des Achill um den Faktor q unterscheidet, gelingt dieses Argument genauso: Legt Achill die Strecke s zurück, hat die Schildkröte die Strecke sq durchlaufen. Wenn im Speziellen s die gesuchte Überholstrecke ist, besteht für sie die Gleichung

$$s = a + sq\,,$$

welche (im Falle $q \neq 1$) folgendermaßen gelöst wird:

$$s = a + sq \quad | -sq$$
$$s(1-q) = a \quad | :(1-q)$$
$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}\,.$$

Zenon argumentiert: Zuerst hat Achill den Vorsprung a zu durchlaufen und die Schildkröte ist inzwischen die Strecke aq voraus, dann hat Achill den verbleibenden Vorsprung aq zu durchlaufen und die Schildkröte hat inzwischen den Weg $aq \cdot q = aq^2$ zurückgelegt, dann hat Achill diesen Vorsprung aq^2 zu durchmessen, während die Schildkröte ihm mit der Strecke $aq^2 \cdot q = aq^3$ voraus ist, und so weiter. Im Lichte der obigen Überlegung behaupten wir, dass die für die gesamte Überholstrecke zu bildende *unendliche* Summe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

in Wahrheit *nicht* — wie Zenon meinte — *unbewältigbar* ist, sondern den oben berechneten Wert s liefert.

Geometrische Reihen

Nicht nur bei der Geschichte des Zenon, immer wieder kommt es vor, dass sich ein Prozess ununterbrochen wiederholt und dabei der Reihe nach Summanden $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ einer „unendlichen Summe", einer sogenannten *Reihe*,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

liefert, die man zu berechnen versucht.

Wenn sich in einer Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

jeder Summand a_n vom vorhergehenden Summanden a_{n-1} um den gleichen Faktor $q \neq 1$ unterscheidet,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

spricht man von einer *geometrischen Reihe*. Setzt man $a_0 = a$, sind $a_1 = aq$, $a_2 = aq^2$, $a_3 = aq^3$, ..., und ihre *Summenformel* lautet:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Periodische Dezimalzahlen

Eine sogenannte *periodische unendliche Dezimalzahl* wie zum Beispiel

$$p = 1{,}1153846153846153846\ldots153846\ldots,$$

in der sich — nach einer sogenannten *Vorperiode*, die hier 1,1 lautet — in den Nachkommastellen eine endliche Ziffernfolge — in diesem Beispiel die Ziffernfolge 153846 — andauernd wiederholt, fassen wir als geometrische Reihe auf. Im vorliegenden Beispiel schreiben wir nämlich

$$p = 1{,}1 + s$$

mit

$$\begin{aligned} s &= 0{,}0153846153846153846\ldots153846\ldots = \\ &= 0{,}0153846 + \\ &+ 0{,}0000000153846 + \\ &+ 0{,}0000000000000153846 + \\ &+ \ldots = \\ &= 1{,}53846 \cdot 10^{-2} + 1{,}53846 \cdot 10^{-8} + 1{,}53846 \cdot 10^{-14} + \ldots \end{aligned}$$

Hier lautet

$$q = \frac{1{,}53846 \cdot 10^{-8}}{1{,}53846 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}.$$

Darum ist

$$\begin{aligned} s &= 1{,}53846 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{1-10^{-6}} = 1{,}53846 \cdot 10^{4} \cdot \frac{1}{10^{6}-1} = \frac{153846}{999999} \cdot 10^{-1} = \\ &= \frac{2}{13} \cdot 10^{-1} = \frac{2}{130}. \end{aligned}$$

Dies ergibt für p das Resultat

$$p = \frac{11}{10} + \frac{2}{130} = \frac{29}{26}.$$

Was hier im Speziellen für $p = 29/26$ gezeigt wurde, gilt natürlich ganz allgemein:

Jede periodische unendliche Dezimalzahl stellt die Summe einer (endlichen) Dezimalzahl und einer geometrischen Reihe dar. Verwendet man für die geometrische Reihe die Summenformel, wird die periodische unendliche Dezimalzahl in Form einer *rationalen* Zahl geschrieben.

Berechtigter Zweifel an der Summenformel

Die Summenformel der geometrischen Reihe scheint Zenon nach Strich und Faden zu widerlegen. In Wahrheit ist dies jedoch *nicht* der Fall. Zenon könnte, hätte man ihm — wie oben erläutert — die Summenformel der geometrischen Reihe entgegengehalten, auf folgende Weise erfolgreich gegen diese ankämpfen:

Stellen wir uns vor, Achill und die Schildkröte *vertauschen ihre Rollen*: die zehnmal so langsame Schildkröte läuft dem Achill nach, der bereits einen Vorsprung von 900 Meter hat. Wenn die Schildkröte die 900 Meter mühsam zurückgelegt hat, ist ihr Achill bereits 9000 Meter im Vorsprung. Und wenn die Schildkröte diese 9000 zusätzlichen Meter gekrochen ist, hat Achill einen noch größeren Vorsprung von 90000 Meter. Einigen wir uns wieder auf einen Kilometer als Längeneinheit, bürden wir der Schildkröte auf, eine Strecke der Länge

$$0{,}9 + 9 + 90 + 900 + 9000 + \ldots$$

zu durchlaufen — und niemand wird glauben, dass sie dabei jemals Achill erreicht. Trotzdem handelt es sich bei der oben angeschriebenen Strecke um eine geometrische Reihe mit $a = 0{,}9$ und $q = 10$. In die Summenformel der geometrischen Reihe eingesetzt, ergibt dies

$$s = 0{,}9 \cdot \frac{1}{1-10} = -0{,}1.$$

Niemand wird ernsthaft das absurde Resultat

$$0{,}9 + 9 + 90 + 900 + 9000 + \ldots = -0{,}1$$

akzeptieren[1].

Zenon hätte mit diesem Gegenargument entdeckt, dass die obige Herleitung der Summenformel einer geometrischen Reihe *nicht korrekt* sein kann, ihn daher *nicht* widerlegt. Ein *Rechenfehler* ist in der Herleitung nicht zu finden. Sie leidet vielmehr an einer *logischen* Unterlassungssünde: Bisher wissen wir nämlich nicht, *was man überhaupt unter einer Summe mit unendlich vielen Summanden versteht*. Darüber gilt es, sich Klarheit zu verschaffen.

Geometrische Summen

Statt *Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

mit *unendlich* vielen Summanden zu betrachten, beschränken wir uns nun auf *Summen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1},$$

in denen nur *endlich* viele Summanden auftreten — in der obigen Summe liegen N Summanden vor.

Eine *geometrische Summe* liegt vor, wenn — wie bei der geometrischen Reihe — das Verhältnis jedes nachfolgenden Summanden a_n zum vorhergehenden Summanden a_{n-1} stets den gleichen Wert $q \neq 1$ annimmt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Setzen wir $a_0 = a$, sind daher $a_1 = aq$, $a_2 = aq^2$, ..., $a_{N-1} = aq^{N-1}$.

Wenn man vom Wert einer geometrischen Summe spricht und diesen

$$s_N = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{N-1}$$

nennt, befindet man sich — im Gegensatz zur Summenformel einer geometrischen *Reihe* — noch auf logisch abgesichertem Boden. Mit einem klugen Trick kann man s_N berechnen: Beide Seiten der obigen Formel mit q multipliziert, ergibt:

$$qs_N = aq + aq^2 + \ldots + aq^{N-1} + aq^N.$$

Im Vergleich zu s_N fehlt hier auf der rechten Seite der Summand a, hingegen ist der Summand aq^N neu dazugekommen. Dies bedeutet:

$$qs_N = s_N - a + aq^N \quad | -s_N$$
$$s_N(q-1) = a(q^N - 1) \quad | :(q-1)$$
$$s_N = a \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Den zuletzt genannten Bruch kann man mit -1 erweitern (was im Falle $q < 1$ günstig ist, weil dadurch der Nenner positiv wird):

$$s_N = a \cdot \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

> Eine aus N Summanden bestehende geometrische Summe besitzt die Summenformeln
>
> $$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{N-1} = a \cdot \frac{q^N - 1}{q - 1} = a \cdot \frac{1 - q^N}{1 - q},$$
>
> wobei im Falle $q > 1$ die erstgenannte und im Falle $q < 1$ die zweitgenannte Formel zu bevorzugen sind.

Nun gilt es zu verstehen, wie man von diesem Ergebnis zur geometrischen *Reihe* mit *unendlich* vielen Summanden zurückgelangt:

Die Konvergenz und Divergenz der Potenzen einer positiven Zahl

Wir betrachten zu diesem Zweck eine Abfolge konkreter Beispiele:

> Es sind natürliche Hochzahlen n zu bestimmen, für die
> $$b^n < \varepsilon$$
> zutrifft, wenn die positive Basis $b < 1$ und die Zahl ε folgendermaßen gegeben sind:
> a) $b = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}04$ b) $b = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}007$
> c) $b = 0{,}999$, $\varepsilon = 0{,}0001$ d) $b = 0{,}9999$, $\varepsilon = 0{,}00001$.

Lösung: Statt die *Ungleichung* $b^n < \varepsilon$ betrachten wir zunächst die *Gleichung*
$$b^x = \varepsilon,$$
welche mit Hilfe des Logarithmus sofort gelöst werden kann:
$$b^x = \varepsilon \quad |\ \ln$$
$$x \cdot \ln b = \ln \varepsilon \quad |:\ln b$$
$$x = \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}.$$
Nun beachten wir, dass wegen $b < 1$ aus $y > x$ die Ungleichung $b^y < b^x$ folgt. Darum trifft für alle natürlichen Zahlen n mit
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}$$
sicher die geforderte Ungleichung
$$b^n < \varepsilon$$
zu.

Speziell ergibt sich für die einzelnen Zahlenwerte

a) $n > \ln(0{,}04)/\ln(0{,}8) = 24{,}74399$, d.h. $n \geq 25$.
(Tatsächlich ist noch
$0{,}8^{24} = 0{,}00472$ aber bereits $0{,}8^{25} = 0{,}00378$.)

b) $n > \ln(0{,}007)/\ln(0{,}9) = 47{,}09397$, d.h. $n \geq 48$.
(Tatsächlich ist noch
$0{,}9^{47} = 0{,}000707$ aber bereits $0{,}9^{48} = 0{,}000636$.)

c) $n > \ln(0{,}0001)/\ln(0{,}999) = 9205{,}73443$, d.h. $n \geq 9206$.
(Tatsächlich ist noch
$0{,}999^{9205} = 0{,}000100073507$ aber bereits $0{,}999^{9206} = 0{,}0000999734336$.)

d) $n > \ln(0{,}00001)/\ln(0{,}9999) = 115123{,}5$, d.h. $n \geq 115124$.
(Tatsächlich ist noch
$0{,}9999^{115123} = 0{,}000010000498128$ aber bereits $0{,}9999^{115124} = 0{,}00000999949808$.)

Die allgemeine Rechnung des Beispiels ist offensichtlich für jede positive Basis $b < 1$ und jede positive Zahl ε anwendbar. Wir fassen die darin erhaltene Erkenntnis in der folgenden *Konvergenzaussage* zusammen:

> Es sei $b < 1$ eine beliebige positive Zahl. Dann kann man zu *jeder* positiven Zahl ε — wie klein sie auch sein möge — eine natürliche Zahl n_0 so bestimmen, dass für *alle* natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung
> $$b^n < \varepsilon$$
> stimmt.

Ein weiteres Beispiel als Kontrast:

<table><tr><td>
Es sind natürliche Hochzahlen n zu bestimmen, für die
$a^n > \Omega$
zutrifft, wenn die Basis $a > 1$ und die Zahl Ω folgendermaßen gegeben sind:
a) $a = 2$, $\Omega = 10000$ b) $a = 1{,}1$, $\Omega = 700$
c) $a = 1{,}05$, $\Omega = 10000$ d) $a = 1{,}001$, $\Omega = 10^{10}$.
</td></tr></table>

Lösung: Statt die *Ungleichung* $a^n > \Omega$ betrachten wir zunächst die *Gleichung*

$$a^x = \Omega,$$

welche mit Hilfe des Logarithmus sofort gelöst werden kann:

$$a^x = \Omega \quad | \ln$$

$$x \cdot \ln a = \ln \Omega \quad | : \ln a$$

$$x = \frac{\ln \Omega}{\ln a}.$$

Nun beachten wir, dass wegen $a > 1$ aus $y > x$ die Ungleichung $a^y > a^x$ folgt. Darum trifft für alle natürlichen Zahlen n mit

$$n > \frac{\ln \Omega}{\ln a}$$

sicher die geforderte Ungleichung

$$a^n > \Omega$$

zu.

Speziell ergibt sich für die einzelnen Zahlenwerte

a) $n > \ln(10000)/\ln(2) = 13{,}28771$, d.h. $n \geq 14$.
(Tatsächlich ist noch
$2^{13} = 8192$ aber bereits $2^{14} = 16384$.)

b) $n > \ln(700)/\ln(1{,}1) = 68{,}73432$, d.h. $n \geq 69$.
(Tatsächlich ist noch
$1{,}1^{68} = 652{,}68344$ aber bereits $1{,}1^{69} = 717{,}95178$.)

c) $n > \ln(10000)/\ln(1{,}05) = 188{,}77453$, d.h. $n \geq 189$.
(Tatsächlich ist noch
$1{,}05^{188} = 9629{,}156$ aber bereits $1{,}05^{189} = 10110{,}614$.)

d) $n > \ln(10^{10})/\ln(1{,}001) = 23037{,}36194$, d.h. $n \geq 23038$.
(Tatsächlich ist noch
$1{,}001^{23037} = 9{,}99638 \cdot 10^9$ aber bereits $1{,}001^{23038} = 1{,}000638 \cdot 10^{10}$.)

Die allgemeine Rechnung des Beispiels ist offensichtlich für jede Basis $a > 1$ und jede positive Zahl Ω anwendbar. Wir fassen die darin erhaltene Erkenntnis in den folgenden *Divergenzaussage* zusammen:

<table><tr><td>
Es sei $a > 1$ eine beliebige Zahl. Dann kann man zu jeder positiven Zahl Ω — wie groß sie auch sein möge — eine natürliche Zahl n_0 so bestimmen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung
$a^n > \Omega$
stimmt.
</td></tr></table>

Geometrische Folgen und reelle Größen

Für positive $b < 1$ und $a > 1$ sind die Folgen der Potenzen

$$b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ \ldots \qquad \text{und} \qquad a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

spezielle geometrische Folgen. Die oben formulierten Konvergenz- und Divergenzaussagen bringen wir nun mit dem System R der reellen Größen in Beziehung:

In der Schule genügt die Definition reeller Zahlen als *Größen, die man mit beliebiger Genauigkeit durch Dezimalzahlen erfassen kann.*

Betrachten wir zunächst die geometrische Folge der Potenzen von 0,9:

$$0{,}9\ ,\ 0{,}9^2 = 0{,}81\ ,\ 0{,}9^3 = 0{,}729\ ,\ 0{,}9^4 = 0{,}6561\ ,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ 0{,}9^{43} = 0{,}0107753\ ,\ 0{,}9^{44} = 0{,}0096977\ ,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 0{,}9^{87} = 0{,}0001045\ ,\ 0{,}9^{88} = 0{,}0000940\ ,\ \ldots :$$

Wenn man zum Beispiel eine Genauigkeit von *einer* genauen Nachkommastelle vereinbart, ist es im Rahmen dieser vereinbarten Genauigkeit legitim, die Potenzen $0{,}9^{43}$ oder $0{,}9^{44}$, aber auch die Potenzen $0{,}9^{87}$ oder $0{,}9^{88}$ mit Null *gleich* zu setzen — denn auf *eine* Nachkommastelle genau betrachtet besteht zwischen diesen Zahlen und Null kein Unterschied.

Wenn man präziser rechnen möchte und zum Beispiel eine Genauigkeit von *drei* genauen Nachkommastellen verlangt, besteht immer noch zwischen den Potenzen $0{,}9^{87}$ oder $0{,}9^{88}$ und Null *kein Unterschied* — auf drei genaue Stellen gerundet, ergeben diese Zahlen Null.

Selbst wenn jemand höchst präzise rechnen möchte und eine Genauigkeit von dreißig genauen Nachkommastellen verlangt (etwas, das in der Praxis *nie* vorkommt, uns aber als Forderung nicht stört), immer noch können wir eine Hochzahl n_0 benennen, so dass für alle Hochzahlen $n \geq n_0$ die Potenzen $0{,}9^n$ in dieser vereinbarten Genauigkeit mit Null *übereinstimmen*. (Man setzt in der Konvergenzaussage zum Beispiel $\varepsilon = 10^{-31}$ fest. Die entsprechende Zahl $n_0 = 678$ ist dabei gar nicht sonderlich groß.)

Allgemein sagen wir daher, dass bei einer positiven Zahl $b < 1$ die geometrische Folge der Potenzen

$$b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ \ldots$$

die *reelle Größe* 0 als *Grenzwert* festlegt, und schreiben dafür

$$0 = \lim_{n\to\infty} b^n\ , \qquad (0 < b < 1).$$

Das Zeichen „lim" steht als Abkürzung des lateinischen Wortes *limes* für Grenzwall, und das darunter angeschriebene „$n \to \infty$" (gelesen als „n strebt nach unendlich") symbolisiert das gerade zuvor Erkannte: Gleichgültig, auf wie viele (*endlich* viele) genaue Nachkommastellen man sich in der Forderung nach Präzision einigt, *immer* wird es gelingen, eine natürliche Zahl n_0 so zu bestimmen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Potenzen b^n in dieser vereinbarten Genauigkeit mit 0 *übereinstimmen*.

Die geometrische Folge der Potenzen

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

divergiert hingegen für $a > 1$ nach unendlich. Es ist nicht verboten, diese Tatsache durch

$$\infty = \lim_{n\to\infty} a^n\ , \qquad (a > 1),$$

zu symbolisieren, wenn man sich dabei stets bewusst ist, dass ∞ *nichts* mit einem Element aus R zu tun hat — im Gegenteil: zu jedem reellen Ω kann man eine natürliche Zahl n_0 so finden, dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $a^n > \Omega$ stimmt — bildhaft gesprochen: keine reelle Zahl kann diese Folge in Schranken halten, sie überschreitet alle Grenzen (die ursprüngliche Bedeutung des lateinischen Wortes *divergere*.)

Betrachtet man eine Zahl q mit $|q| = b < 1$, folgt aus $-b^n \leq q^n \leq b^n$ dass, sobald man die Potenz b^n (im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit) mit Null gleichsetzen kann, man zugleich auch q^n mit Null gleichsetzen darf. Die Multiplikation von q^n mit einem Faktor a ändert an dieser Tatsache prinzipiell nichts (man muss nötigenfalls höchstens höhere Potenzen betrachten, weil die Multiplikation mit einem betragsmäßig großen a eine Kommaverschiebung bewirkt). Somit erhalten wir für geometrische Folgen einen Konvergenzsatz:

Die geometrische Folge

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ aq^3\,,\ \dots$$
legt im Falle eines q mit $|q| < 1$ die reelle Zahl 0 als Grenzwert fest, (sie *konvergiert* gegen 0),
$$0 = \lim_{n\to\infty} aq^n\,, \qquad (|q| < 1).$$
Dies bedeutet, dass wir bei einer beliebig präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl n_0 so benennen können, dass für alle Hochzahlen $n \geq n_0$ die Ausdrücke aq^n (im Rahmen dieser Genauigkeit) mit Null übereinstimmen.

Auch dies wird am deutlichsten anhand eines konkreten Beispiels:

Es ist eine natürliche Zahl n_0 zu bestimmen, ab der man alle Glieder der geometrischen Folge
$$1000,\ 800,\ 640,\ 512,\ \dots$$
mit Null gleichsetzen darf, wenn man eine Genauigkeit von a) sieben, b) siebzehn, c) siebzig genauen Nachkommastellen vereinbart.

Lösung: Die vorliegende geometrische Folge lautet
$$1000\,,\ 1000\cdot 0{,}8\,,\ 1000\cdot 0{,}8^2\,,\ 1000\cdot 0{,}8^3\,,\ \dots\,.$$
Wenn wir aus
$$1000\cdot 0{,}8^x = 10^{-k}$$
für a) $k = 8$, b) $k = 18$, c) $k = 71$ den Wert x bestimmen, haben wir mit einer natürlichen Zahl $n_0 \geq x$ die Aufgabe sicher gelöst. Wir lösen die Gleichung gleich für beliebige k, indem wir beide Seiten logarithmieren:
$$\ln 1000 + x\cdot\ln 0{,}8 = -k\cdot\ln 10 \quad |\, -\ln 1000\,,\ :\ln 0{,}8$$
$$x = \frac{-k\cdot\ln 10 - \ln 1000}{\ln 0{,}8}\,.$$
Speziell erhält man hieraus die Werte

a) für $k = 8$: $x = 113{,}51$, daher kann man $n_0 = 114$ setzen.
(Tatsächlich ist $1000\cdot 0{,}8^{114} = 8{,}96\cdot 10^{-9} = 0$, wenn man mit sieben genauen Nachkommastellen rechnet.)

b) für $k = 18$: $x = 216{,}70$, daher kann man $n_0 = 217$ setzen.
(Tatsächlich ist $1000\cdot 0{,}8^{217} = 9{,}34\cdot 10^{-19} = 0$, wenn man mit siebzehn genauen Nachkommastellen rechnet.)

c) für $k = 71$: $x = 763{,}59$, daher kann man $n_0 = 764$ setzen.
(Tatsächlich ist $1000\cdot 0{,}8^{764} = 9{,}14\cdot 10^{-72} = 0$, wenn man mit siebzig genauen Nachkommastellen rechnet.)

Die Summen geometrischer Reihen

Nun kehren wir zur geometrischen Reihe
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$
zurück.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass q die Bedingung $|q| < 1$ erfüllt.

Parallel zur *Reihe* mit ihren unendlich vielen Summanden betrachten wir die *Summe*
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1} = a\cdot\frac{1-q^N}{1-q}\,,$$
in der nur endlich viele (nämlich N) Summanden addiert werden. Befinden wir uns im System R, haben wir uns auf eine bestimmte Genauigkeit in der Angabe der reellen Größen zu einigen: Egal auf wie viele genaue Nachkommastellen man präzise rechnen möchte — immer wird man eine natürliche Zahl N_0 so finden können, dass für alle Hochzahlen $N \geq N_0$ nicht nur die Potenzen q^N (im Rahmen dieser Genauigkeit) und 0, sondern zugleich auch die Brüche

$$a \cdot \frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{1-0}{1-q} = a \cdot \frac{1}{1-q}$$

miteinander übereinstimmen.

Es sei $|q| < 1$. Gleichgültig, auf wie viele (*endlich* viele) genaue Nachkommastellen man sich in der Forderung nach Präzision einigt, *immer* wird es gelingen, eine natürliche Zahl N_0 so zu bestimmen, dass alle geometrischen Summen

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{N-1}$$

mit mindestens N_0 Summanden (d.h. mit $N \geq N_0$) in dieser vereinbarten Genauigkeit mit dem Bruch

$$a \cdot \frac{1}{1-q}$$

übereinstimmen.

Diese Konvergenzaussage erlaubt, der geometrischen *Reihe*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

im Falle $|q| < 1$ den Bruch

$$a \cdot \frac{1}{1-q}$$

als *Summe* zuzuordnen. Wir schreiben daher

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots = a \cdot \frac{1}{1-q}, \qquad (|q| < 1).$$

Mit dieser Formel verbinden wir jedoch *nicht* die Vorstellung, wir hätten wirklich alle unendlich vielen Summanden der Reihe addiert. Vielmehr bedeutet diese Formel, dass man mit *beliebiger* Genauigkeit zu dieser Summe gelangt, wenn man endlich viele (aber entsprechend der geforderten Genauigkeit *hinreichend* viele) Summanden der Reihe addiert.

Zenon und die Analysis

Die Mathematik des Systems R der reellen Größen heißt *Analysis*. Sie ordnet den geometrischen Reihen sinnvoll Summen zu. Sie formuliert überdies eine Bedingung — nämlich $|q| < 1$ — für die Berechnung der Summen geometrischer Reihen.

Die geometrische Reihe 0,9 + 9 + 90 + 900 + ... *verletzt* zum Beispiel diese Bedingung. Darum erklärt die Analysis, warum Achill die Schildkröte überholt, obwohl sie anfangs einen Vorsprung besaß, während die Schildkröte Achill nie überholen wird, wenn dieser ihr voran ist — selbst wenn man Zenons Gedanken folgt.

Ist Zenon damit widerlegt?

Nur dann, wenn auch er die Analysis als gültige Mathematik anerkennt. Legt er sich jedoch darauf fest, *nur* mit rationalen Zahlen zu rechnen — ein Ziel, das fast alle Mathematiker des antiken Griechenland verfolgten — bleibt er von den Konvergenzaussagen der vorigen Abschnitte unbeeindruckt. (Denn rationale Zahlen liegen im Unterschied zu reellen Größen stets mit *endgültiger* Präzision vor; Rechnungen, bei denen eine bestimmte Zahl von genauen Nachkommastellen vereinbart ist, sind dem System Q der rationalen Zahlen wesensfremd.)

Darum gelingt es zwar *nicht*, Zenon zu widerlegen. Aber wir können aus den obigen Überlegungen den folgenden Schluss ziehen: *Auch* Zenon erreicht mit seiner Geschichte *nicht* sein Ziel, die Unmöglichkeit von Wandel und Bewegung logisch zwingend zu beweisen. Die Analysis stellt eine Theorie dar, in der Zenons Geschichte von Achill und der Schildkröte ihre beunruhigende Pointe verliert.

Konvergente Folgen

Die aus der geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots$$

gebildeten geometrischen Summen

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a\,, \\
s_2 &= a + aq\,, \\
s_3 &= a + aq + aq^2\,, \\
&\dots, \\
s_N &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1}\,, \\
s_{N+1} &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1} + aq^N\,, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

bilden den Schlüssel zur Definition der Summe s der obigen Reihe: Einigt man sich auf eine Anzahl genauer Nachkommastellen, stimmen ab einer darauf abgestimmten natürlichen Zahl N_0 die Summen s_N für alle $N \geq N_0$ mit s überein.

Diese Definition kann man für Folgen ganz allgemein fassen:

> Eine Folge von Zahlen
>
> $$s_1\,,\ s_2\,,\ s_3\,,\ s_4\,,\ \dots$$
>
> heißt *konvergent*, wenn sie eine reelle Zahl s als *Grenzwert* festlegt, (sie gegen s *konvergiert*),
>
> $$s = \lim_{n\to\infty} s_n\ .$$
>
> Dies bedeutet, dass wir bei einer ***beliebig*** präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl n_0 so benennen können, dass für alle $n \geq n_0$ die Zahlen s_n (im Rahmen dieser Genauigkeit) mit s übereinstimmen.

Eines der bekanntesten Beispiele lautet:

> Es ist herzuleiten, dass die beiden Folgen
>
> $$1\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{5}{3}\,,\ \frac{7}{4}\,,\ \frac{9}{5}\,,\ \dots,\ \frac{2n-1}{n}\,,\ \dots\,, \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$
>
> und
>
> $$3\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \frac{7}{3}\,,\ \frac{9}{4}\,,\ \frac{11}{5}\,,\ \dots,\ \frac{2n+1}{n}\,,\ \dots\,, \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$
>
> gegen den Grenzwert 2 konvergieren.
>
> Speziell ist ein Folgeglied anzugeben, ab dem bei einer Festlegung von sieben genauen Nachkommastellen alle weiteren Folgeglieder sicher mit 2,0000000 übereinstimmen.

Lösung: Wir berechnen bei beiden Folgen den Unterschied zwischen dem allgemeinen Folgeglied und dem behaupteten Grenzwert:

$$\frac{2n-1}{n} - 2 = -\frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{1}{n}\ .$$

Der *Betrag* dieser Unterschiede lautet in beiden Fällen $1/n$.
Wir betrachten nun für ein *beliebiges positives* ε die *Ungleichung*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon\ .$$

Weil die ihr entsprechende *Gleichung*

$$\frac{1}{x} = \varepsilon$$

die Lösung

$$x = \frac{1}{\varepsilon}$$

besitzt, und weil aus $x < y$ sicher $1/y < 1/x$ folgt, ist bei einer natürlichen Zahl $n_0 > x$ das Folgende gesichert: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt $1/n < \varepsilon$. Insbesondere sind für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Folgeglieder

$$\frac{2n-1}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{2n+1}{n}$$

weniger als ε von 2 entfernt.
Beim Rechnen mit reellen Zahlen hat man sich immer auf eine bestimmte Genauigkeit zu einigen: man kann *beliebig* viele, stets aber nur *endlich* viele genaue Nachkommastellen der Ergebnisse fordern. Einigt man sich auf eine Angabe der reellen Zahlen als Dezimalzahlen mit k genauen Nachkommastellen, bedeutet dies, dass $\varepsilon = 10^{-k-1}$ (d.h. $\varepsilon = 0{,}000...001$, wo die Ziffer 1 erst bei der $(k+1)$-ten Nachkommastelle auftritt) im Rahmen dieser Genauigkeit mit 0 übereinstimmt. Deshalb stimmen auch die Folgeglieder

$$\frac{2n-1}{n} \qquad \text{und} \qquad \frac{2n+1}{n}$$

ab $n \geq n_0$ im Rahmen dieser Genauigkeit mit 2 überein.
Wenn zum Beispiel $k = 7$ ist (man sich also auf sieben genaue Nachkommastellen festlegt), erhält man für $\varepsilon = 10^{-8}$ die Lösung $x = 10^8$ und folglich $n_0 = 100000001$. Tatsächlich ergeben die Folgeglieder mit dieser Nummer auf sieben genaue Stellen gerundet den Wert

$$\frac{200000001}{100000001} = 1{,}99999999 = 2{,}0000000$$

und

$$\frac{200000003}{100000001} = 2{,}00000001 = 2{,}0000000 \ .$$

Konvergente Reihen

Liegt eine Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

mit unendlich vielen Summanden a_0, a_1, a_2, a_3, ... vor, kann man ihr — wie im Spezialfall der geometrischen Reihe — unter bestimmten Voraussetzungen eine *Summe* s zuordnen: Man betrachtet die sogenannten *Partialsummen* der Reihe, das sind die Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0 \,, \\ s_2 &= a_0 + a_1 \,, \\ s_3 &= a_0 + a_1 + a_2 \,, \\ &\ldots , \\ s_N &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1} \,, \\ s_{N+1} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1} + a_N \,, \\ &\ldots , \end{aligned}$$

und untersucht, ob die Folge dieser Partialsummen gegen einen Grenzwert s konvergiert. Wenn dies der Fall ist, heißt dieser Grenzwert die Summe der Reihe, und man schreibt

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s \,.$$

Ausführlich bedeutet dies Folgendes: Einigt man sich bei der Angabe reeller Zahlen auf irgendeine Anzahl von genauen Nachkommastellen, gelingt es, eine natürliche Zahl N_0 mit folgender Eigenschaft zu finden: Für *alle* natürlichen Zahlen $N \geq N_0$ stimmen im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit die Partialsummen

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1}$$

mit der Summe s der Reihe überein. Betrachtet man neben $N \geq N_0$ noch eine beliebige natürliche Zahl n, muss die um weitere n Summanden vermehrte Partialsumme

$$s_{N+n} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n-2} + a_{N+n-1}$$

umso mehr im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit mit s übereinstimmen. Darum ist der Unterschied der beiden Partialsummen, der sogenannte *Reihenrest*

$$s_{N+n} - s_N = a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n-1}$$

im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit *Null*.

Eine Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

konvergiert bereits dann, wenn man bei einer *beliebig* präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl N_0 so benennen kann, dass für alle natürlichen Zahlen $N \geq N_0$ und alle natürlichen Zahlen n die Reihenreste

$$s_{N+n} - s_N = a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+n-1}$$
verschwinden. Die Summe s der Reihe stimmt (im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit) mit jeder der Partialsummen s_N ab $N \geq N_0$ überein[2].

Was aus dieser Konvergenztheorie gefolgert werden kann, zeigt exemplarisch das folgende Beispiel:

Es ist zu begründen, dass die Reihe
$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$$
konvergiert und die Summe 2 besitzt. b) Es ist zu begründen, dass die Reihe
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$
konvergiert. Ihre Summe ist mit einer genauen Nachkommastelle anzugeben.

Lösung: Der Trick, die Konvergenz der Reihe in a) zu beweisen, besteht darin, die Formel
$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
bei der Berechnung der Partialsummen zu verwenden:
$$s_N = 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(N-1)N}=$$
$$=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}=2-\frac{1}{N}=\frac{2N-1}{N}.$$
Die Folge der Partialsummen lautet daher:
$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{9}{5},\ \ldots,\ \frac{2N-1}{N},\ \ldots.$$
Aus dem Ergebnis des obigen Beispiels wissen wir, dass diese Folge gegen 2 konvergiert. Daher ist tatsächlich
$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots=2.$$
Die Methode, die Konvergenz der Reihe in b) zu beweisen, besteht darin, diese Reihe mit der Reihe in a) zu *vergleichen*: Es gilt nämlich
$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\quad \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\quad \frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4},\ldots,\quad \frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},\ldots,$$
das heißt: *alle Summander der in* b) *genannten Reihe sind höchstens so groß wie die Summanden der in* a) *genannten Reihe.*
Wir nennen die Partialsummen der in b) genannten Reihe S_1, S_2, S_3, S_4, ... und die Partialsummen der in a) genannten Reihe s_1, s_2, s_3, s_4, ... Aus der oben bewiesenen Konvergenz folgern wir: Einigt man sich bei der Angabe von reellen Größen auf irgendeine Anzahl genauer Nachkommastellen, gelingt es, eine natürliche Zahl N_0 so zu nennen, dass alle Reihenreste
$$s_{N+n} - s_N$$
verschwinden, sobald $N \geq N_0$ gilt. Umso mehr müssen die Reihenreste
$$S_{N+n} - S_N$$
verschwinden, denn die in b) genannten Summanden sind durchwegs höchstens so groß wie ihre Entsprechungen in a). Daher besitzt auch die in b) genannte Reihe eine Summe S.
Wir wissen vom obigen Beispiel, dass bei einer vereinbarten Genauigkeit von einer genauen Nachkommastelle, d.h. bei $\varepsilon = 0{,}01$ die Zahl $N_0 = 101$ lautet: in der Tat ist
$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}=2-\frac{1}{101}=1{,}9901=2{,}0.$$

Um daher S mit einer genauen Nachkommastelle anzugeben, braucht man bloß die ersten 101 Summanden der in b) genannten Reihe zu addieren:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{101^2}=1{,}63508=1{,}6\,,$$

folglich gilt auf eine Nachkommastelle genau berechnet:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=1{,}6\,.$$

(Mit elektronischen Rechnern kann man mühelos Summen von viel mehr als hundert Summanden auswerten. Wenn man S zum Beispiel auf fünf genaue Stellen berechnen möchte, reicht es aus, die ersten 1000001 Summanden dieser Reihe zu addieren. In diesem Fall ergibt sich der Wert

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=1{,}64493\,.)$$

Die in diesem Beispiel genannte Methode des Vergleichs von Reihen ist in vielen Fällen sehr erfolgreich. Wir fassen sie folgendermaßen zusammen:

> Wenn eine Reihe
> $$a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots$$
> gegen eine Summe s konvergiert und eine zweite Reihe
> $$b_0+b_1+b_2+b_3+\ldots$$
> so gegeben ist, dass durchwegs die Ungleichungen
> $$|b_0|\le a_0\,,\qquad |b_1|\le a_1\,,\qquad |b_2|\le a_2\,,\qquad |b_3|\le a_3\,,\qquad \ldots$$
> bestehen, dann konvergiert auch die zweite Reihe gegen eine Summe S.

Genauer gilt Folgendes: Einigt man sich bei der Angabe reeller Größen auf irgendeine Anzahl von genauen Nachkommastellen, dann gibt es eine natürliche Zahl N_0, sodass für alle $N \ge N_0$ die Partialsummen

$$s_N=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{N-1}$$

im Rahmen dieser Genauigkeit bereits mit s übereinstimmen. Umso mehr nennt die Partialsumme

$$S_N=b_0+b_1+b_2+\ldots+b_{K-1}$$

(bei beliebigen $N \ge N_0$) die Summe S der zweiter Reihe auf die vereinbarte Zahl von Nachkommastellen genau.

---

[1] Der hier erhaltene Wert $-0{,}1$ ist nicht ganz sinnlos: Wenn nämlich Achill und die Schildkröte bereits *vor* unserem festgelegten Beginn — an dem Achill der Schildkröte 900 Meter voraus ist — unterwegs waren, dann hat 100 Meter *vor* der Position, welche die Schildkröte zum Zeitpunkt Null einnahm, Achill diese überholt. Eine *Summe* der durchwegs positiven Zahlen 0,9, 9, 90, 900, 9000, … kann $-0{,}1$ jedoch *nicht* sein.

Auch das Wort „Niemand" in diesem Satz ist etwas übertrieben: Euler zum Beispiel konnte einer absurden Formel wie $0{,}9+9+90+900+\ldots=-0{,}1$ durchaus Sinn abgewinnen — und Euler ist alles andere als ein mathematischer Niemand. Allerdings teilt heute wirklich kaum ein Mathematiker mehr Eulers Sicht der Dinge.

[2] Dass jede Reihe unter der in diesem Satz genannten Konvergenzbedingung eine Summe besitzt, nennt man die *Vollständigkeit* der Systems $\mathbb{R}$ der reellen Größen.